



YEREL OLMAYAN ÇUBUK TEORİSİNİN DİNAMİK PROBLEMLERİ

Ekrem Tüfekçi¹, Olcay Oldaç², Serhan Aydın Aya³
^{1, 2, 3} İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi,
Gümüşsuyu, 34437, İstanbul

ABSTRACT

Nanobeams are widely used as a structural element for nanodevices and nanomachines. The development of nano-sized machines depends on proper understanding of mechanical behavior of these nano-sized beam elements. Small length scales such as lattice spacing between atoms, surface properties, grain size etc. are need to be considered when applying any classical continuum model. In this study, Eringen's nonlocal elasticity theory is used and its equations are written in cylindrical coordinates and then applied to the beam theory. The effects of axial extension, the shear deformation and rotatory inertia are included in the equations to capture unique dynamic behavior of the nanobeams. The governing differential equations are solved exactly by using the initial value method. A detailed parametric study is conducted to examine the effect of the nonlocal parameter, opening angle and slenderness ratio on the dynamic behavior of nanobeam. In-plane free vibration of circular nanobeams with uniform cross-section is presented.

ÖZET

Nano çubuklar, nano aletler ve nanomakinalar için yapısal eleman olarak yaygın şekilde kullanılmaktadır. Nano boyutlu makinaların geliştirilmesi, bu nano boyutlu çubuk elemanlarının mekanik davranışlarının doğru bir şekilde anlaşılmasına bağlıdır. Herhangi bir klasik sürekli ortam modelini uygularken atomlar arasındaki kafes aralığı, yüzey özellikleri, tane boyutu vb. gibi küçük uzunluk ölçekleri göz önüne alınmalıdır. Bu çalışmada, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi kullanılmış ve denklemleri silindirik koordinatlarda yazılarak çubuk teorisine uygulanmıştır. Çubukların gerçek dinamik davranışlarını elde edebilmek için, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri de denklemlere dahil edilmiştir. Diferansiyel denklemlerin kesim çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Yerel olmayan parametrenin, çubuk açıklığının, sınır koşullarının ve narinlik oranının nano çubuğun dinamik davranışı üzerindeki etkisini incelemek için ayrıntılı bir parametrik çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada, sabit kesitli çember eksenli nano çubukların düzlem içi serbest titreşimleri için kesin çözüm sunulmuştur.

GİRİŞ

Modern teknolojiye, cihazların özellikleri büyük bir hızla gelişirken, boyutları ise aynı hızla küçülmektedir. Boyutlar küçülmeye başladıkça, özellikle, nanometre mertebelerine inildiğinde, malzemelerin yeni ve mükemmel fiziksel özelliklerinin ortaya çıktığı belirlenmiştir. Atomların ve moleküllerin dizilişi tasarlanarak olağanüstü özelliklere sahip yeni yapay malzemeler ortaya çıkarılmaktadır. Bu malzemelerle, nano boyutlarda cihazlar ve sistemler tasarlanmaktadır. Bu yeni teknolojiye nanoteknoloji denmektedir. Nanoteknolojinin

en önemli temel alanlarından biri nanomekaniktir. Nanomekanikğin çalışma konusu, nano boyuttaki sistemlerin kuvvet ve yer değiştirme ilişkilerinin ve titreşim özelliklerinin analizi ile fonksiyonel ve elastik karakteristiklerinin incelenmesidir. Özellikle, karbon nanotüplerin keşfinden sonra, nanomekanik konusundaki çalışmalar yoğunlaşmıştır. Son zamanlarda, nano elektromekanik sistemlerin (NEMS) ortaya çıkması ile nanomekanikğe olan ilgi oldukça artmıştır.

Nano boyutlu çubuk yapılar, büyük rijitlik ve mukavemet değerleri, düşük yoğunlukları ve üstün iletkenlikleriyle, nano elektro mekanik sistemlerde, ultra duyarlı algılayıcılarda, yarı iletken nano kablolarda ve atomik kuvvet mikroskoplarında temel yapı elemanları olarak kullanılmaktadır [1]. Bu malzemelerin boyutları çok küçük olduğundan, deney yapmak çok güçtür. Yapılan deneysel çalışmalar, mikro ve nano ölçekteki malzemenin mekanik özelliklerinin ve mekanik davranışının boyuta bağlı olduğunu göstermektedir. Nano ölçekteki malzemenin elastiklik modülünün normal boyutlardaki malzemelerinkine göre aşırı yüksek olduğu bulunmuştur [2, 3]. Salvétat vd. [4] karbon nanotüplerin elastik modülünün 1 TPa civarında olduğunu hesaplamıştır. McFarland ve Colton [3] mikro konsol kiriş için ölçülen rijitlik değerlerinin klasik kiriş teorisi ile ölçülen değerlere göre 4 kat daha büyük olduğunu belirtmiştir. Nano çubukların yapısal eleman olarak, biyosensor [5], MEMS (mikro elektro-mekanik sistemler) ve NEMS cihazlar [6] gibi birçok alanda kullanımı söz konusudur.

Son yıllarda, yerel olmayan sürekli ortamlar için kullanışlı çeşitli teoriler geliştirilmiş ve çeşitli çalışmalarda kullanılmıştır. Bunların en yaygın olanlarından biri, verilen bir noktadaki gerilme durumunun cismin üzerindeki bütün noktalardaki birim şekil değiştirme durumlarıyla belirlendiği Eringen'in integral teorisi veya yerel olmayan elastisite teorisidir [7-9]. Berrabah vd. [15] basit mesnetli bir nano çubuğun eğilme burkulma ve serbest titreşimlerini incelemek üzere, bir yerel olmayan kayma deformasyonu teorisi ortaya atmıştır. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi, boyuta bağlı sürekli ortam modelleri arasında ön plana çıkmaktadır [10-13]. Nano çubukları, sonlu eleman yöntemini kullanarak inceleyen çalışmalar da mevcuttur [14, 15].

Literatür incelemesi nano çubukların statik davranışıyla ilgili daha önce yapılan çalışmaların genellikle doğru eksenli çubuklarla sınırlı kaldığını göstermektedir. Eğri eksenli nano çubuklarla ilgili sınırlı sayıda çalışma mevcuttur [16-18]. Bunların bir çoğu eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini ihmal etmekte, sayısal ve yaklaşık çözüm yöntemlerini kullanmaktadırlar.

Bu çalışmada, düzlemsel eğri eksenli nano çubukların dinamik davranışları, yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri kullanılarak incelenmiştir. Eringen [1] tarafından verilen yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri, silindirik koordinatlarda yazılarak, çubuk denklemleri elde edilmiştir. Çubuğun statik davranışını ifade eden bu denklemlerden hareketle, d'Alembert prensibi yardımıyla, dinamik davranışları ifade eden denklemlere ulaşılabilmektedir. Kesin çözüm, sadece, sabit kesitli, çember eksenli çubuklar için söz konusu olmaktadır. Titreşim ile ilgili çeşitli problemler çözülerek, doğal frekanslar elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen frekanslar yardımıyla mod şekilleri de çizilmiştir. Boyut parametresi, çubuk açıklığı, narinlik oranı gibi bazı parametrelerin değişiminin çubuğun dinamik davranışına etkisini göstermek amacıyla çeşitli örnekler verilmiştir. Sonuçlar, etkilerin göz önüne alındığı ve alınmadığı farklı durumlar için hesaplanmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Yerel ve yerel olmayan elastisite teorisinin gerilme tensörleri arasındaki ilişki Eringen tarafından;

$$(1 - \gamma^2 \nabla^2) \sigma^{nl} = \sigma^l \quad (1)$$

olarak verilmektedir. Burada, γ yerel olmayan parametreyi, ∇^2 Laplasyen operatörünü, σ^{nl} yerel olmayan elastisite teorisinin gerilme tansörünü, σ^l yerel (klasik) elastisite teorisinin gerilme tansörünü göstermektedir. Bu tensörel ifade, silindirik koordinatlarda yazılarak yerel (klasik) ve yerel olmayan elastisite teorilerindeki gerilmeler arasındaki ilişki elde edilir. Bu denklemler çubuk varsayımıyla kesit üzerinde integre edilerek, θ koordinatındaki kesit tesirleri olan F_n^{nl} , F_t^{nl} ve M_b^{nl} ile F_n^l , F_t^l ve M_b^l arasındaki ilişki,

$$F_t^{nl} - \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial \theta^2} = F_t^l \quad (2)$$

$$F_n^{nl} - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{\partial^2 F_n^{nl}}{\partial \theta^2} = F_n^l \quad (3)$$

$$M_b^{nl} - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{\partial^2 M_b^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} F_t^{nl} = M_b^l \quad (4)$$

olarak elde edilir: Yukarıdaki ifadeler yerel elastisite teorisinin çubuğun düzlemindeki statik davranışını ifade eden denklemlerinde [19] yerine konularak, yerel olmayan elastisite teorisinin statik davranışlarını ifade eden çubuk denklemleri elde edilir [20]. D'Alembert prensibi ile bu denklemleri kullanarak, eğri eksenli çubukların titreşimlerini ifade eden denklemler şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{dw(\theta)}{d\theta} &= \frac{\left(1 + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \rho A(\theta) \omega^2\right)} u(\theta) \\ &+ \frac{\frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \rho A(\theta) \omega^2\right)} w(\theta) \\ &+ \frac{\frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right)}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \rho A(\theta) \omega^2\right)} F_t^{nl}(\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{du(\theta)}{d\theta} = & - \frac{\left(1 + \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} w(\theta) \\
& + \frac{\frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} u(\theta) \\
& + \frac{R(\theta)}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} \Omega_b(\theta) \\
& + \frac{\frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right)}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} F_n^{nl}(\theta)
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = & - \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} [R(\theta)]^2 \rho A(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} u(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta} \rho I_b(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \Omega_b(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} M_b^{nl}(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} F_n^{nl}(\theta)
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho I_b(\theta) \omega^2 \Omega_b(\theta) - R(\theta) F_n(\theta) \tag{8}$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 w(\theta) + F_n(\theta) \tag{9}$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 u(\theta) - F_t(\theta) \tag{10}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemler; matrisel formda;

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{y}(\theta) \tag{11}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{A}(\theta)$ matrisi, katsayılar matrisidir. Bu diferansiyel denklem takımının kesin analitik çözümü, katsayılar matrisinin sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğa karşı gelmektedir. Bu denklem takımının başlangıç değerleri yöntemiyle kesin çözümü de;

$$\mathbf{y}(\theta) = e^{A\theta} \mathbf{y}_o \quad (12)$$

olarak bilinmektedir [21]. Burada, \mathbf{y}_o referans koordinatındaki başlangıç değerleri vektörü, $\mathbf{A}(\theta)$ katsayılar matrisidir. Başlangıç değerleri vektörü \mathbf{y}_o değerleri, sınır şartları yardımıyla elde edilecektir. Ancak, sınır şartlarından elde edilen denklemler homojen denklem takımı oluşturmaktadır. Bu homojen denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir. Buradan elde edilecek denklemin çözümü, frekans değerlerini vermektedir. Ayrıca, elde edilen frekanslar yardımıyla, denklemler, değişkenlerden birine göre normalize edilerek mod şekilleri de elde edilmiş ve mod şekilleri çizilmiştir.

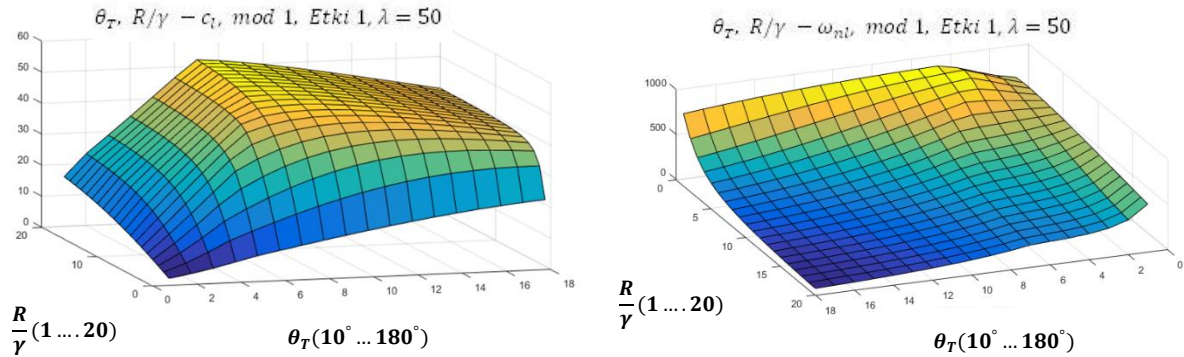
SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, θ_T çubuğun toplam açıklığının, mesnetleme durumunun, λ narinlik oranının ve R/γ boyut parametresinin doğal frekanslara etkileri incelenmiştir.

İlk olarak, boyut parametresi R/γ 'nın ve toplam açıklık θ_T 'nin, yerel olmayan teorinin verdiği frekansa etkileri incelenmiştir. Bunun için, narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun birinci doğal frekanslarına olan etki ele alınmıştır. Boyutsuz frekans değeri;

$$c = (R_0 \theta_T)^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_{b0}}} \omega \quad (13)$$

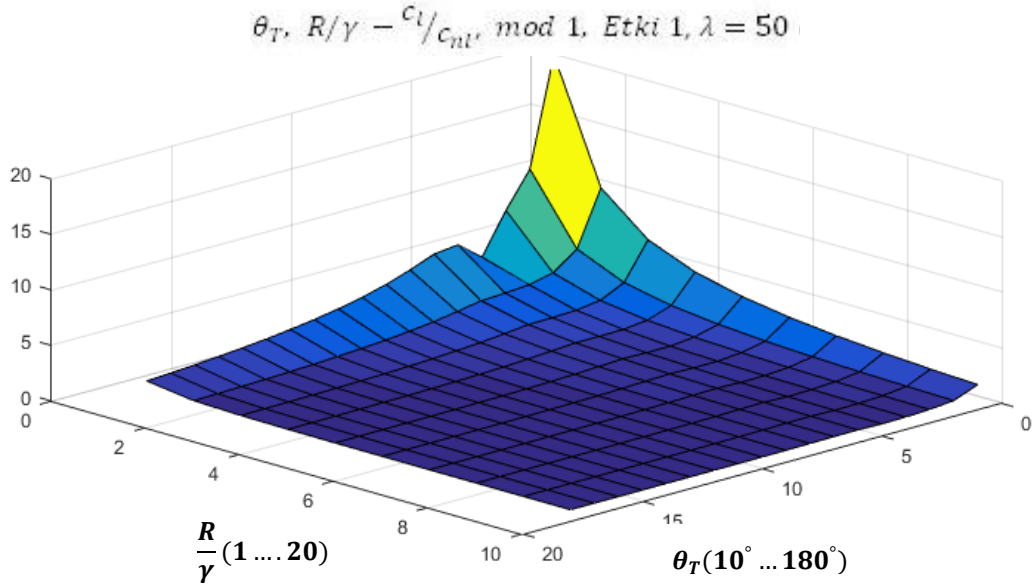
olarak belirlenmiştir.



Şekil 1. Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci frekans katsayısı c 'nin ve doğal frekansının R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

Şekil 1'de, R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin, yerel olmayan teorinin verdiği boyutsuz frekansa ve frekansa olan etkileri görülmektedir. Burada, R/γ 'nın ve θ_T 'nin küçük değerlerinde doğal frekansın önemli değişimler gösterdiği, büyük R/γ ve θ_T değerlerinde ise, frekansın pek etkilenmediği görülmektedir.

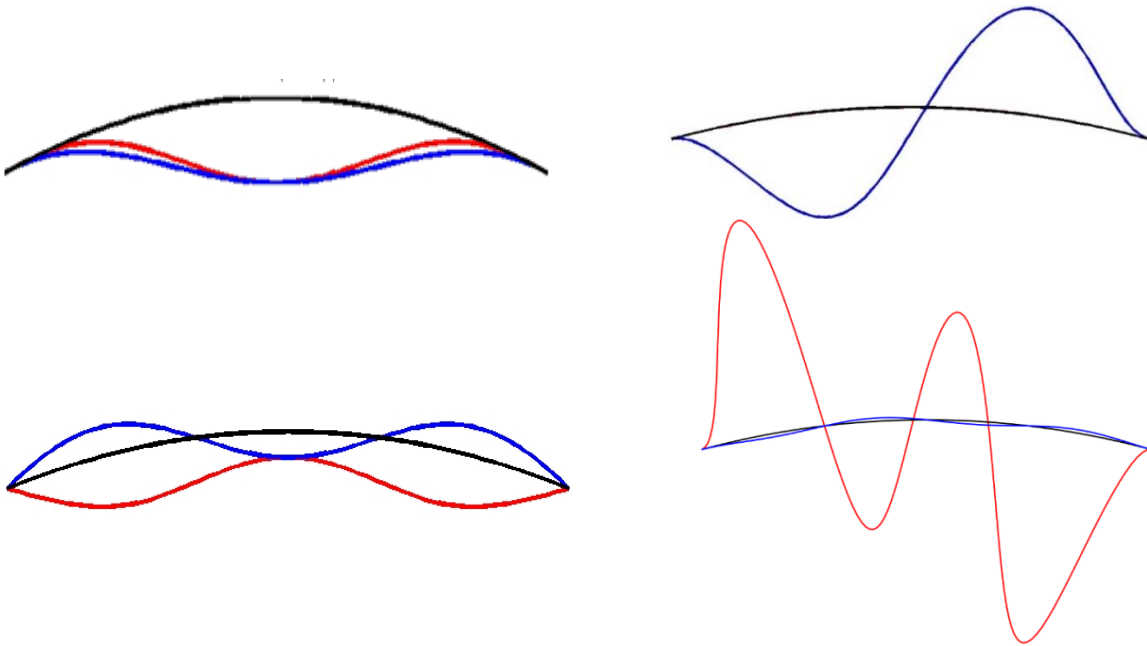
Şekil 2'de, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanan boyutsuz frekansların oranına R/γ ve θ_T 'nin etkisi görülmektedir. Boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin büyük değerlerinde, boyutsuz frekanslar oranının hemen hemen sabit kaldığı ve R/γ ile θ_T 'nin küçük değerlerinde ise önemli değişiklikler gösterdiği görülmektedir.



Şekil 2. Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel ve yerel olmayan birinci frekans katsayıları oranının R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

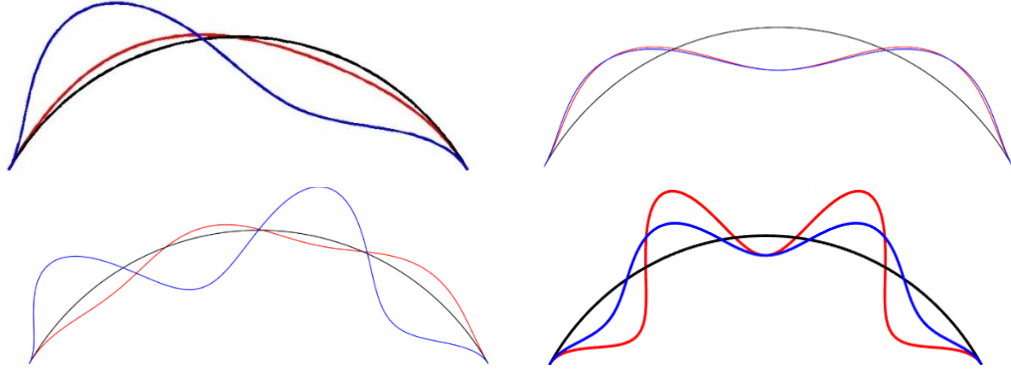
$$(\theta_T = 30^\circ, \lambda = 150, \frac{R}{\gamma} = 1).$$

Şekil 3'te, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan ankastre-ankastre mesnetli çubuğun hem yerel olmayan hem de yerel teorisin verdiği denklemler kullanılarak elde edilen ilk dört mod şekilleri verilmektedir. Burada verilen tüm şekillerde, siyah çizgiyle gösterilen eğri, şekil değiştirmemiş çubuğun eksenini, kırmızıyla gösterilen çizgi, yerel olmayan teoriden elde edilen mod şeklini ve maviyle gösterilen çizgi de yerel teorisin verdiği mod şeklini göstermektedir. Üçüncü mod şeklinde, yerel teorisin mod şeklinde, eğilme şekil değiştirmesi baskın iken, yerel olmayan teorisin mod şeklinde, eksenel şekil değiştirmenin daha baskın olduğu görülmektedir.



Şekil 3. Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun ilk dört mod şekli.

Şekil 4'te, açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun ilk dört mod şekli verilmektedir. Bu şekilden, yerel ve yerel olmayan teorilerin hesapladığı mod şekillerinin benzer karakterde olduğu görülmektedir. Bu çubuğun birinci mod şeklinin, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun birinci modundan (Şekil 3) farklı olduğu, ikinci mod şekline (Şekil 3) benzediği dikkat çekmektedir. Bu, yerel teoride görülen mod geçişinin, yerel olmayan teoriyle hesaplanan sonuçlarda da görüldüğünü ortaya koymaktadır [38].



Şekil 4. Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mod şekilleri ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 150$, $\frac{R}{\gamma} = 1$).

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisinde verilen denklemler, silindirik koordinatlarda düzenlenmiş ve bu denklemler çubuk teorisine uygulanmıştır. Daha önce, doğrusal çubuklar için yapılan çalışmalarda, bu denklemler, kartezyen koordinatlarda yazılarak, denklemlerde yerine konmuştur. Yerel olmayan elastisite teorisinin denklemlerinin, silindirik koordinatlarda yazılması, kartezyen koordinatlarda yazılmasına göre oldukça karmaşıktır. Ayrıca, silindirik koordinatlarda yazılmış olan bu denklemlerin, eğri eksenli çubuk teorisine uyarlanması da oldukça karmaşıktır. Daha önce, literatürde bulunan, eğri eksenli çubuklarla ilgili çalışmalarda, genellikle, kartezyen koordinatlardakine benzer denklemler varsayımıyla, çözüm önerileri bulunmaktadır.

Boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin büyük değerlerinde, ω_{nl}/ω_l frekanslar oranının hemen hemen sabit kaldığı ve R/γ ve θ_T 'nin küçük değerlerinde ise önemli değişiklikler gösterdiği görülmüştür. Her θ_T toplam açıklık değeri için, R/γ 'nin artmasıyla frekanslar oranının bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin azaldığı görülmektedir. Küçük eğrilik yarı çaplarında ve küçük açıklık oranlarında frekans değerlerinde önemli değişiklikler görülmektedir. Açıklık değeriyle boyutsuz frekansın değişimi de beklendiği gibi, küçük değerlerde hızlı bir artma ve sonrasında ise nispeten yavaş bir azalma gösterdiği tespit edilmiştir.

Çember eksenli sabit kesitli çubuğun yerel olmayan ve yerel frekans oranları ω_{nl}/ω_l 'nin, boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi incelendiğinde; küçük çubuk açıklığı değerlerinde, narinlik oranı arttıkça, frekans oranının boyut parametresinden daha çok etkilendiği, büyük açıklık değerlerinde ise narinlik oranının değişiminin etkisinin daha az olduğu görülmüştür.

Narinlik oranı büyük olan çubuklarda, yerel teoride olduğu gibi, yerel olmayan teoride de mod geçişi gözlenmiştir [22]. Mod geçişi, çubuk açıklık değerinin artışıyla birinci mod şeklinin, bir formdan başka bir forma geçmesidir. Yerel ve yerel olmayan teorilerin mod şekillerinin birbiriyle aynı olduğu görülmüştür. Aynı çubuk için yerel teorisinin hesapladığı

mod şeklinin, eğilme şekil değiştirmesi baskın şekilde olduğu, buna karşın, yerel olmayan teoremin hesapladığı mod şeklinin ise,eksenel şekil değiştirmenin daha baskın olarak ortaya çıktığı tespit edilmiştir.

ÇALIŞMAYI DESTEKLEYEN KURUMLAR

Makale, 112M404 no.lu proje ile TÜBİTAK tarafından, ayrıca İTÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından da desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Li, C., Chou, T. W. (2003). Single-walled carbon nanotubes as ultra-high frequency nanomechanical resonators. *Physical Review B*, 68 (7), 073405.
- [2] Treacy, M. M. J., Ebbesen, T. W., Gibson, J. W. (1996). Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes. *Nature*, 381 (6584), 678-680.
- [3] McFarland, A.W., Colton, J.S. (2005). Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15, 1060-1067.
- [4] Salvétat, J.P., Briggs, G.A.D., Bonard, J.M., Bacsá, R.R., Kulik, A.J., Stöckli, T. (1999). Elastic and shear moduli of single-walled carbon nanotube ropes. *Physical Review Letters*, 82, 944-947.
- [5] Joshi, A.Y., Sharma, S.C., Harsha, S.P. (2011). Zeptogram scale mass sensing using single walled carbon nanotube based biosensors. *Sensors and ActuatorsA*, 168, 275-280.
- [6] Lee, S.W., Campbell, E.E.B. (2013). Nanoelectromechanical devices with carbon nanotubes. *Current Applied Physics*, 13, 1844-1859.
- [7] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54, 4703-4710.
- [8] A.C. Eringen, D.G.B. Edelen, On nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*. 10 (1972) 233–248. doi:10.1016/0020-7225(72)90039-0.
- [9] A.C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, 2002.
- [10] Baretta, R., Marotti de Sciarra, F., Diaco, M. (2014). Small-scale effects in nanorods. *Acta Mechanica*, 225(7):1945-1953.
- [11] Narendar, S., Mahapatra, D. R. and Gopalakrishnan, S. (2011). Prediction of nonlocal scaling parameter for armchair and zigzag single-walled carbon nanotubes based on molecular structural mechanics, nonlocal elasticity and wave propagation. *International Journal of Engineering Science*, 49, 509-522.
- [12] Peddieson, J., Buchanan, G. R. and McNitt, R. P. (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41, 305-312.
- [13] Mahmoud, F. F., Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E. and Meletis, E.I. (2012) Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite elements. *Journal of Mechanical Science and Technology* 26, 3555-3563
- [14] Phadikar, J. K. and Pradhan, S. C. (2010). Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational Materials Science*, 49 (3), 492-499.
- [15] Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E. and Mahmoud, F. F. (2014). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4787-4797.

- [16] Arefi, A. and Salimi, M. (2015). Investigations on vibration and buckling of carbon nanotubes with small initial curvature by nonlocal elasticity theory. *Fullerenes, Nanotube Carbon Nanostructures* 23, 105-112.
- [17] Artan R., Tepe A. (2011). Nonlocal Effects in Curved Single-Walled Carbon Nanotubes. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18 (5), 347-351.
- [18] Wang, C.M., Xiang, Y., Yang, J., Kitipornchai, S. (2012). Buckling of nano-rings/arches based on nonlocal elasticity. *International Journal of Applied Mechanics*, 4, 1250025-1250025-13.
- [19] Tufekci, E., Arpacı, A. (2006). Analytical solutions of in-plane static problems for non-uniform curved beams including axial and shear deformations. *Structural Engineering and Mechanics*, 22 (2), 131-150.
- [20] Tufekci, E., Aya, S.A., Oldaç, O., (2016). A Unified Formulation for Static Behavior of Nonlocal Curved Beams, *Structural Engineering and Mechanics*. 59(3):475-502.
- [21] Tufekci, E., Arpacı, A. (1998). Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 209 (5), 845-856.
- [22] Tufekci, E. (2001). Exact solution of free in-plane vibration of shallow circular arches. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1, 409-428.